

第 1 部

様々な運動

力と運動についてまとめられた古典力学は、17 世紀のガリレイやニュートンにはじまり、19 世紀前半にはほぼ完成した。古典力学は現代でも自動車や建築の設計、人工衛星の制御などに利用されており、私たちの生活を支えている。

第 1 章 物体の運動 10

『物理基礎』では、直線上の物体の運動の表し方や等加速度直線運動について学習した。ここでは、平面内の物体の運動の表し方や**斜方投射**、**空気抵抗**がはたらく落下運動について学習しよう。

第 2 章 剛体のつり合い 29

大きさを持ち、力を加えても変形しない物体を**剛体**という。剛体が静止する条件を、力のつり合いと**力のモーメント**のつり合いから考えよう。

第 3 章 運動量と力積 44

衝突や分裂をする物体の運動は、質量と速度の積である**運動量**や力学的エネルギーを用いて考えることができる。**運動量保存の法則**や**弾性衝突**、**非弾性衝突**について学習しよう。

第 4 章 円運動と単振動 66

円運動や**単振動**は一定の時間で同じ動きを繰り返す運動である。これらの運動の速度や加速度、周期、周期的な運動を引き起こす力について学習しよう。

第 5 章 万有引力 97

太陽を周回する惑星の運動は、ケプラーによってまとめられた。**ケプラーの法則**と惑星の運動のもととなっている**万有引力の法則**について学習しよう。

太陽を周回する彗星

第1章 物体の運動

『物理基礎』では、物体が直線上を運動する場合を中心に、速度や加速度、力などについて学んだ。

しかし、私たちが実際に目にする運動には、投げられたボールや、カーブを曲がる自動車など、平面内で曲線を描くように運動するものも少なくない。

この章では、平面内の物体の運動の表し方について学習しよう。

第1節 平面内の運動

風のない雨の日の雨粒は鉛直方向にまっすぐ落下する。しかし、傘を差して歩く人は、傘を斜めに傾けなければ体がぬれてしまうのはなぜだろう。雨粒と歩行者のような、鉛直面内や水平面内での物体の運動の表し方について考えよう。

A 位置と変位

1 位置ベクトル

図1のように、物体の**位置** position は、座標で表すことができる。物体が直線上を運動するときは、直線に沿って x 軸をとる。

物体が平面内を運動するときは、平面内に x 軸と y 軸をとると、座標 (x, y) を用いて物体の位置を表すことができる。

図1では、原点 O から矢印を引いて点 P の位置を表している。この矢印を**位置ベクトル**といい、物体の位置を、原点から見たときの向きと距離で示している。位置ベクトルを \vec{r} と書くと、 \vec{r} が向きと大きさをもつ量なのに対し、位置ベクトルの大きさ r は距離のみを表す。

↑図1 位置を表すベクトル

問1 図中の船の位置 (x, y) を表せ。また船の位置を表す位置ベクトルの大きさ r を求めよ。

2 変位

図2のように、点 P_1 から点 P_2 への物体の移動を考えよう。位置ベクトル \vec{r}_1, \vec{r}_2 はそれぞれの点の位置を表す。初めの位置から終わりの位置に向かって引いた矢印()は、物体の位置の変化を表している。これを**変位** displacement (**変位ベクトル**)といい、位置が変化した向きと変化の大きさを表す。図2から、変位 $\Delta \vec{r}$ と位置ベクトルの関係は、次式で表されることが分かる。

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

変位は途中の経路には関係しない。初めと終わりの位置が同じであれば、どんな経路でも

変位は同じである。図3の場合、経路が変わると動いた道のり()は変わるが、変位()は変わらない。

↑図2 位置の変化を表すベクトル

↑図3 変位と道のりが異なる場合

問2 白球が点 P_1 から点 O を経由して点 P_2 まで移動したとき、移動距離、変位の大きさをそれぞれ求めよ。

座標とベクトルの成分

変位のように、大きさと向きのある量をベクトルという(資料1→p.431を参照)。ベクトルの和と差を求めるには、作図で求める方法と成分で求める方法→p.13, 14, 16 参考がある。

位置ベクトルの始点を原点とすると、終点の座標が x 成分, y 成分を表す。

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2)$$

変位は位置ベクトルの差であり、その成分 Δx , Δy は成分ごとに計算ができる。

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

変位の大きさ Δr は三平方の定理から、

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

変位は、初めの位置 (x_1, y_1) と終わりの位置 (x_2, y_2) のみから求めることができる。途中の経路には関係しない。

3 速度

図2のように、ある時間に物体が P_1 から P_2 へ移動するとき、**単位時間あたりの変位**を、この間の**平均の速度**という。平均の速度もベクトルである。経過時間 $\Delta t (= t_2 - t_1)$ の間の変位が $\Delta \vec{r} (= \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ であるので、この間の平均の速度 \vec{v} と表すと、 \vec{v} は次式で表される。

$$\vec{v} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) / (t_2 - t_1) = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad (1)$$

✓Check 単位時間

単位時間とは、1秒間, 1分間, 1時間などである。何かの1の量を表すときに「単位○○あたり」という言葉を使う。

\vec{v} の大きさ $|\vec{v}|$ は $|\Delta \vec{r}| / \Delta t$ に等しく、 \vec{v} の向きは $\Delta \vec{r}$ の向きと一致する。

図2で、 t_2 を t_1 に近づけて Δt を限りなく0に近づけると、 P_2 は P_1 に近づくので、式(1)は P_1 を通過する時刻の**瞬間の速度** \vec{v} を表す。つまり、 \vec{v} は物体がその瞬間に、どの向きにど

んな速さで進んでいるかを表す。 \vec{v} の大きさ v を**瞬間の速さ**といい、 $v = |\vec{v}|$ である。

一般に、速度や速さといえば、瞬間の速度や瞬間の速さを表す。

速度の方向は、その時刻における物体の位置で、軌跡に引いた接線の方向と一致する→図 4。

↑図 4 瞬間の速度

速度(瞬間の速度) 条件 Δt を 0 に近づけた極限

$$\text{速度 } \vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad (2)$$

$$\text{速さ } v = |\vec{v}| = |\Delta \vec{r}| / \Delta t \quad (3)$$

速度の方向：軌跡の接線方向

\vec{v} 速度(velocity)

$\Delta \vec{r}$ 変位(displacement)

Δt 経過時間(time)

v 速さ(speed)

問 3 船が右の図の に沿って運動するとき、図中のそれぞれの点 A, B, C を通過する瞬間の速度の向きを図中に矢印で示せ。

B 速度の合成と分解

1 速度の合成

図 5 のように船が川を横切るように進むとき、地面に静止している人から見た船の運動について考えてみよう。

地面に対する川の流れの速度を \vec{v}_1 [m/s] とする。図 5 で P にあった船が、船首を水平面上の P' に向けて静水時の速度 \vec{v}_2 [m/s] ①で出発した。船は出発したときの向きを保持のまま運動するものとする。

船は川の水によって流されるので、地面から見ると P から Q に移動するように見える。つまり、地面に対する船の速度 \vec{v} は、速度 \vec{v}_1 , \vec{v}_2 の和となる。速度 \vec{v} を \vec{v}_1 , \vec{v}_2 の**合成速度**といい、合成速度を求めることを**速度の合成**という。合成速度もベクトルである。

↑図 5 速度の合成

速度の合成 意味 合成速度 \vec{v} は速度 \vec{v}_1 と速度 \vec{v}_2 の和

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (4)$$

\vec{v} [m/s] 合成速度(地面(基準)に対する船の速度)

\vec{v}_1 [m/s] 地面(基準)に対する川の水の流れの速度

\vec{v}_2 [m/s] 静水時の船の速度(流れのない水に対する船の速度)

問4 流れのない水に対して 2.0 m/s の速さで進むことのできる船がある。この船を、地面に対して 1.5 m/s の速さで流れる川で、船首を川の流りに垂直な方向に保ったまま進めた。このとき、川岸に対する船の速さはいくらか。

参考 ベクトルの和(作図で求める方法)

ベクトルの和を作図で求めるには、**1**□、**2**□の2通りの考え方がある。

1 \vec{a} の終点に \vec{b} の始点を重ね、 \vec{a} の始点から \vec{b} の終点への矢印を作図する。

2 \vec{a} 、 \vec{b} を2辺とする平行四辺形の対角線を作図する。

① \vec{v}_2 は流れのない状態で船が進む速度である。

2 速度の分解

式(4)は、速度 \vec{v} を速度 \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 に分ける式と考えることもできる。このような見方を**速度の分解**といい、分解された速度 \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 を**分速度**という。

速度を分解する場合、互いに垂直な2つの方向に分けることが多い。図6では、船の速度 \vec{v} を互いに垂直な x 軸、 y 軸方向へ分解し、それぞれの分速度を \vec{v}_x 、 \vec{v}_y としている。分速度 \vec{v}_x 、 \vec{v}_y の大きさに座標軸の正負の向きを表す符号をつけたものを、 \vec{v} の **x 成分**、 **y 成分**といい、それぞれ v_x 、 v_y とすると、 $\vec{v}=(v_x, v_y)$ と表すことができる。このとき、 \vec{v} の大きさ(速さ)を v 、 \vec{v} と x 軸とのなす角を θ とすると、 v_x や v_y と v との間には次の関係がある。

↑図6 速度の分解

速度の分解

$$v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta \quad (5)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (6)$$

v_x 、 v_y 速度の x 成分、 y 成分

v 速さ

θ \vec{v} と x 軸とのなす角

問5 飛行機が、水平から 30° 上方へ一定の速さ 30 m/s で飛行している。図の水平方向では右向きを正、鉛直方向では上向きを正とする。

(1) 飛行機の速度の水平成分、鉛直成分を求めよ。

(2) 飛行機が、時間 6.0 s の間に上昇した高さを求めよ。

参考 ベクトルの和と差(成分で求める方法)

ベクトルの和と差は、ベクトルを x 軸, y 軸方向の成分に分解し、成分ごとに計算することもできる。

\vec{a} と \vec{b} が $\vec{a}=(a_x, a_y)$, $\vec{b}=(b_x, b_y)$ であるとする、

① ベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y)$

② ベクトルの差 $\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y)$

↑ 図 i ベクトルの和

C 相対速度

図 7 のように、自転車に乗って地面に対して速度 \vec{v}_A で進んでいる人 A から、速度 \vec{v}_B で進む自動車 B を見る。このとき、A の速度によって、B が離れていくように見えたり→図 7 (a), 止まって見えたり、近づいてくるように見えたりする→図 7(b)。つまり、観測者の運動状態によって、相手の運動の見え方に違いが生じ、地面に対する速度と異なる速度で見える。

このように、動く観測者 A から見た相手 B の速度を、A に対する B の相対速度^① \vec{v}_{AB} という。A に対する B の相対速度は、観測される B の速度から、観測者 A の速度を引くことで求められる。これは、図 8 のように、A と B の速度の向きが直線上にない場合も成り立つ。

↑ 図 7 相対速度(直線上の場合)

↑ 図 8 相対速度(平面上の場合)

相対速度 意味 A から見た B の速度

$$\vec{v}_{AB}=\vec{v}_B-\vec{v}_A \quad (7)$$

\vec{v}_{AB} [m/s] A に対する B の相対速度

\vec{v}_A [m/s] 地面(基準)に対する A の速度

\vec{v}_B [m/s] 地面(基準)に対する B の速度

✓ Check

(相対速度)=(相手の速度)-(観測者の速度)

このように、観測者の運動状態により、物体の速度は異なって見えるため、物体の速度を表すときには、それがどのような運動をしている観測者から見たものであるかを明確にしなければならない。ただし、特に断りがない場合、地面上に静止した観測者から見たものとする。

①「A に対する B の相対速度」を「A から見た B の相対速度」ということがある。

参考 相対速度の求め方

① 作図による方法

STEP 1 速度ベクトルを平行移動させて始点を一致させる。

STEP 2 \vec{v}_A の終点から \vec{v}_B の終点への矢印を作図する。

② 成分による方法(→ p. 14 参考)

STEP 1 それぞれの速度を成分に分解する。

$$\vec{v}_A = (v_{Ax}, v_{Ay}), \quad \vec{v}_B = (v_{Bx}, v_{By})$$

STEP 2 成分ごとに引き算をする。 $\vec{v}_{AB} = (v_{Bx} - v_{Ax}, v_{By} - v_{Ay})$

例題 1 車窓から見た雨滴の相対速度

風がなく、雨滴が鉛直下向きに降っているとき、10 m/s の速さで水平に走っている電車の中から外を見たところ、雨滴が鉛直方向→p. 434 に対して 60° の角をなして前方から降ってくるように見えた。このとき、地上に対して雨滴が落下する速さは何 m/s か。

解 電車の速度を \vec{v}_A 、雨滴の速度を \vec{v}_B とする。電車に対する雨滴の相対速度を \vec{v}_{AB} とすると、式(7)より、 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ で、右の図のような関係にある。よって、雨滴が落下する速さ v_B は、 $v_B = v_A / \tan 60^\circ = 10 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ m/s} / 3 \approx \underline{5.8 \text{ m/s}}$

つながる指針 2 つの速度をベクトルで表し、それらの差から相対速度を求める。

類題 1 北から吹く風の中を自転車で東向きに 10 m/s の速さで走ると、風がちょうど北東から吹くように感じた。地面に対する風速は何 m/s か。

参考 ベクトルの差(作図で求める方法)

① \vec{a} と \vec{b} の始点を一致させて、 \vec{b} の終点から \vec{a} の終点への矢印を作図する。

② $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ と考えて、 \vec{a} 、 $-\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線を作図する。

① 平方根については、資料 1 も参照(→p. 434)。

やってみよう 相対速度

①歩きながら相手の運動を撮影してみよう。

②歩く速さや向きを変え、相手の運動の見え方がどう変化するか確認しよう。

D 加速度

図9 (a)のように、物体が時刻 t_1 に点 P_1 を速度 \vec{v}_1 で通過し、時刻 t_2 に点 P_2 を速度 \vec{v}_2 で通過したとき、**単位時間あたりの速度の変化をこの間の平均の加速度**という。経過時間を $\Delta t (= t_2 - t_1)$ 、速度の変化を $\Delta \vec{v} (= \vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ とすると、この間の平均の加速度 \vec{a} は、次式で表される。

$$\vec{a} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) / (t_2 - t_1) = \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (8)$$

平均の加速度 \vec{a} もまたベクトルであり、その向きは速度の変化 $\Delta \vec{v}$ の向きに一致する。そのため、速度 \vec{v}_1 , \vec{v}_2 や $\Delta \vec{v}$ と平均の加速度 \vec{a} との関係は図9 (b)のようになる。
 t_2 を t_1 に近づけて Δt を限りなく 0 に近づけると、 P_2 は P_1 に近づくので、式(8)は P_1 を通過する時刻の**瞬間の加速度** \vec{a} を表す。つまり、 \vec{a} は物体の速度が、その瞬間にどの向きにどんな割合で変化しているかを表す。

一般に、加速度といえば瞬間の加速度をさす。加速度の大きさ a は $a = |\vec{a}|$ であり、**加速度の向きは、その瞬間の速度の変化の向きである。**

↑図9 加速度

問6 東向きに 5.0 m/s で進む船が、10 s 後に北向きに 5.0 m/s となった。この間の平均の加速度はどちら向きに何 m/s² か。

第1節の振り返り

- 直進する2つの船に衝突の恐れがあるとき、互いに相手の運動はどのように見えるか。
- 日傘は常に太陽に向けるが、雨傘は歩く速度に応じてどのように向きを変えるか。

第2節 落体の運動

バスケットボールのシュートやホースからの放水など，身の回りには軌跡が曲線を描く運動がたくさんある。これらの運動にはどのような共通点があるだろうか。重力を受ける物体の運動の規則性に注目しよう。

1 等加速度直線運動

図 10 のように， x 軸上を一定の加速度 a [m/s²] で等加速度直線運動をしている物体の時刻 0 s のときの位置を 0 m，速度を v_0 [m/s] とする。

↑ 図 10 等加速度直線運動

図 11 の v - t グラフは，時刻 t [s] とその瞬間の速度 v [m/s] との関係を表す。

v - t グラフの傾きは，加速度を表す。 v - t グラフの直線から速度の式が得られる。 v - t グラフと t 軸で囲まれた部分の面積は，時刻 t での位置 x [m] を表す。

$$v = v_0 + at \quad (9)$$

$$x = v_0 t + (1/2) at^2 \quad (10)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad (11)$$

↑ 図 11 等加速度直線運動の v - t グラフ ($a > 0$ の場合)

2 自由落下

重力だけを受けて，初速度 0 で落下する運動を自由落下 free fall という。図 12 (b)は，初めの位置を原点 0 ，時刻を 0 s とし，鉛直下向きを正とした v - t グラフである。物体は等加速度直線運動をし，このときの加速度を重力加速度(大きさ g) という。 g の値は，同じ場所では物体の質量によらず一定であり，地球上では約 9.8 m/s² である。

↑ 図 12 自由落下

図 12 (a)のように，時刻 t [s] での物体の速度を v [m/s] とし，位置を y [m] の値で表す。物体は初速度 $v_0 = 0$ m/s，加速度 $a = g$ [m/s²] の等加速度直線運動をするので，次式が得られる。

$$v = gt \quad (12) \quad y = (1/2) gt^2 \quad (13) \quad v^2 = 2gy \quad (14)$$

3 鉛直投げおろし

図 13 (a)のように，物体を鉛直下向きに投げおろした場合も，等加速度直線運動となり，加速度は，その質量や初速度の大きさに関係なく，自由落下の場合と同じ大きさ g である。

図 13 (b)は、初めの位置を原点 0, 初速度の向き(鉛直下向き)に y 軸をとっているため、傾きは g になっている。時刻 t での物体の速度を v とし、位置を y 軸の値で表す。初速度の大きさ v_0 で等加速度直線運動をするので、次式が得られる。

$$v = v_0 + gt \quad (15) \quad y = v_0 t + (1/2)gt^2 \quad (16) \quad v^2 - v_0^2 = 2gy \quad (17)$$

↑ 図 13 鉛直投げおろし

4 鉛直投げ上げ

図 14 (a)のように、物体を鉛直上向きに投げ上げた場合も、**加速度は常に鉛直下向きに大きさ g である。**

図 14 (b)では、初速度の向き(鉛直上向き)に y 軸をとっているため、傾きは $-g$ になっている。時刻 t での物体の速度を v とし、位置を y 軸の値で表す。初速度の大きさ v_0 で等加速度直線運動をするので、次式が得られる。

$$v = v_0 - gt \quad (18) \quad y = v_0 t - (1/2)gt^2 \quad (19) \quad v^2 - v_0^2 = -2gy \quad (20)$$

↑ 図 14 鉛直投げ上げ

空気抵抗→p. 26 が無視できるとき^①、水平方向や斜め方向に投げ出した物体は、曲線運動をする。ここでは、これらの落体の運動について調べてみよう。

A 水平投射

物体をある高さから水平方向に投げ出すことを**水平投射**という。図 15(a)は、水平投射した物体と、自由落下する物体のストロボ写真である。

水平投射した物体の運動を水平方向と鉛直方向に分解してみると、物体は**水平方向には投げ出したときの速さで等速度運動をし、鉛直方向には自由落下と同じ運動をしていること**がわかる。また、水平投射した物体の速度は、 $\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t$ より、時間 Δt ごとに $g\Delta t$ ずつ鉛直下向きに変化する→図 15(b)。

↑ 図 15 水平投射した物体のストロボ写真(a)と速度ベクトル(b)

1 水平投射の式

図 16 のように、物体を水平方向に初速度の大きさ v_0 で投げ出したときの運動を考える。物体を投げ出した位置を原点 0 とし、初速度の向きに x 軸、鉛直下向きに y 軸をとる。物体を投げ出した時刻を $t=0$ とし、時刻 t における物体の位置 P の座標を (x, y) 、速度 \vec{v} の x, y 成分を v_x, v_y とする。

↑ 図 16 水平投射の位置と速度

① 以後、特に断らないかぎり、空気抵抗はないものとする。

物体は x 軸方向には正の向きに速さ v_0 の等速度運動をするので、次式が成り立つ。

$$v_x = v_0 \quad (21) \quad x = v_0 t \quad (22)$$

また、 y 軸方向には自由落下(初速度が 0, 加速度が g の等加速度運動)と同じ運動をするので、等加速度直線運動の式より、次式が得られる。

$$v_y = gt \quad (23) \quad y = (1/2)gt^2 \quad (24) \quad v_y^2 = 2gy \quad (25)$$

時刻 t での物体の速さ v は、 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow$ p. 14 式(6)に式(21), (23)を代入して、次式で表される。

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \quad (26)$$

また、式(22), (24)から t を消去すると、次式が得られる。

$$y = g/(2v_0^2) x^2 \quad (27)$$

式(27)は、水平投射した物体の運動の軌跡を表す。このような運動を**放物運動**といい、 y が x の 2 次関数で表される曲線を**放物線**という \rightarrow p. 430。

✓ Check 等加速度直線運動

$$v = v_0 + at \quad (9)$$

$$x = v_0 t + (1/2)at^2 \quad (10)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad (11)$$

例題 2 水平投射

地上からの高さが 19.6 m の点 0 から、水平方向に 14.7 m/s の初速度で小石を投げ出した。この時刻を 0, 重力加速度の大きさを 9.8 m/s²として、次の問いに答えよ。

- (1) 小石が地面に達する時刻 t_1 を求めよ。
- (2) 投げ出した点から着地点までの水平距離 L を求めよ。

解 (1) 点 0 を原点、初速度の向きに x 軸、鉛直下向きに y 軸をとる。 y 軸方向には自由落下と同じ運動をするから、

$$\text{式(24)より,} \quad 19.6 \text{ m} = 1/2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times t_1^2$$

$$t_1 > 0 \text{ より } t_1 = \underline{2.0 \text{ s}}$$

(2) x 軸方向には等速度運動をするから、

$$\text{式(22)より,} \quad L = 14.7 \text{ m/s} \times 2.0 \text{ s} = 29.4 \text{ m} \doteq \underline{29 \text{ m}}$$

つながる指針 水平方向の等速度運動と、鉛直方向の自由落下と同じ運動に分解する。

時刻 t は 2 つの方向の式で共通の値となることを利用する。

類題 2 例題 2 で着地する直前の小石の速さを求めよ。

B 斜方投射

物体を斜め上向きに投げ出すことを**斜方投射**という。

図 17 は、水平方向から角 θ だけ斜め上向き(この角 θ を仰角という)に初速度の大きさ v_0 で斜方投射した物体と、それと同時に鉛直上向きに投げ上げた物体のストロボ写真である。ただし、それぞれの鉛直方向の初速度は同じである。

斜方投射した物体の運動を水平方向と鉛直方向に分解してみると、物体は**水平方向には等速度運動をし、鉛直方向には鉛直投げ上げ(初速度が鉛直上向きで、加速度が鉛直下向きに大きさ g の等加速度運動)と同じ運動をしていることがわかる。**

↑ 図 17 斜方投射した物体と同時に鉛直投げ上げた物体のストロボ写真

1 斜方投射の式

図 18 (a)のように、物体を水平方向から角 θ だけ斜め上向きに初速度の大きさ v_0 で投げ出したときの運動を考える。物体を投げ出した位置を原点 O として、初速度の水平成分の向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。このとき、初速度の x 軸、 y 軸方向の成分はそれぞれ $v_0 \cos \theta$ 、 $v_0 \sin \theta$ である。物体を投げ出した時刻を $t=0$ として、時刻 t における物体の位置 P の座標を (x, y) 、速度 \vec{v} の x 、 y 成分を v_x 、 v_y とする。

↑ 図 18 斜方投射の位置と速度

物体は x 軸方向には正の向きに速さ $v_0 \cos \theta$ の等速度運動をするので、次式が成り立つ。

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (28)$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (29)$$

また、 y 軸方向には初速度が $v_0 \sin \theta$ 、加速度が $-g$ の等加速度運動をするので、等加速度直線運動の式より、次式が得られる。

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (30)$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - 1/2gt^2 \quad (31)$$

$$v_y^2 - (v_0 \sin \theta)^2 = -2gy \quad (32)$$

式(29)、(31)から t を消去すると、次式が得られる。

$$y = \tan \theta \cdot x - (g/(2(v_0 \cos \theta)^2)) x^2 \quad (33)$$

式(33)より、斜方投射された物体の軌跡も放物線になることがわかる。

また、時刻 t における物体の速さ v は、 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow$ p. 14 式(6)より得られる。

✓Check 等加速度直線運動

初速度 v_0 、加速度 a の等加速度直線運動で、時刻 t での速度を v 、位置を x とすると、

$$v = v_0 + at \quad (9)$$

$$x = v_0 t + (1/2) at^2 \quad (10)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad (11)$$

問 7 図のように、仰角 60° の向きに初速度の大きさ 19.6 m/s で小物体を投げ出した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし、次の問いに答えよ。

- (1) 投げ出してから 0.50 s 後の小物体の速度の x 成分、 y 成分をそれぞれ求めよ。
- (2) 投げ出してから 2.0 s 後の小物体の位置 (x, y) を求めよ。

例題 3 斜方投射

右の図のように、地上の点 O から仰角 θ の向きに初速度の大きさ v_0 で小物体を投げ出した。小物体を投げ出した時刻を 0 、重力加速度の大きさを g とし、次の問いに答えよ。

- (1) 小物体が放物運動の最高点に達する時刻 t_1 と最高点の高さ H を求めよ。
- (2) 小物体を投げ出した地点 O から落下点までの水平距離 D を求めよ。
- (3) 初速度の大きさを一定にして仰角 θ を変えて投げ出したとき、小物体が最も遠くに落下するときの仰角 θ を求めよ。

解 (1) 小物体が最高点に達したとき、速度の y 成分は 0 となるので、

$$[v_y = v_0 \sin \theta - gt] \text{ より, } 0 = v_0 \sin \theta - gt_1 \text{ よって, } t_1 = \underline{(v_0 \sin \theta) / g}$$

したがって、「 $y = v_0 \sin \theta \cdot t - (1/2) gt^2$ 」より、

$$H = v_0 \sin \theta \cdot t_1 - (1/2) gt_1^2 = \underline{(v_0^2 \sin^2 \theta) / 2g}$$

(2) 小物体が地面に達したとき、 $y=0$ となるから、この時刻を t_2 とすると、

$$[y = v_0 \sin \theta \cdot t - (1/2) gt^2] \text{ より,}$$

$$0 = v_0 \sin \theta \cdot t_2 - (1/2) gt_2^2 \quad \text{ここで } t_2 \neq 0 \text{ より, } t_2 = (2v_0 \sin \theta) / g (= 2t_1)$$

$$[x = v_0 \cos \theta \cdot t] \text{ より, } D = v_0 \cos \theta \cdot t_2 = v_0 \cos \theta \cdot (2v_0 \sin \theta) / g = \underline{(v_0^2 \sin 2\theta) / g}$$

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲で、 $0 \leq \sin 2\theta \leq 1$ であるから、(2)で求めた D が最大になるのは $\sin 2\theta = 1$ のとき、つまり $2\theta = 90^\circ$ 、よって、 $\theta = \underline{45^\circ}$

つながる指針 水平方向には等速度運動、鉛直方向には鉛直投げ上げと同じ運動をする。また、最高点に達したとき、速度の鉛直方向の成分は 0 、地面に落下したとき $y=0$ である。

類題 3 右の図のように、点 O から仰角 30° 、初速度の大きさ 19.6 m/s で小石を投げた。ただし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 小石が放物運動の最高点の高さに達するのは、小石を投げてから何 s 後か。
 (2) 小石が点 0 から 39.2m 下の地面に着地するのは、小石を投げてから何 s 後か。
 (3) 点 0 から小石の着地点までの水平距離 L は何 m か。また、着地する直前の速さは何 m/s か。

❶ 三角関数の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ (2 倍角の公式) を用いた (→p. 432)。

2 重力加速度と重力

自由落下や放物運動など、物体に重力のみがはたらく運動の加速度を、運動方程式から考えてみよう。空気抵抗が無視できるとき、質量 m の物体にはたらく力は、鉛直下向きに大きさ mg の重力 \vec{mg} のみである。このとき物体の加速度を \vec{a} とすると、運動方程式より、 $m\vec{a} = \vec{mg}$ したがって、 $\vec{a} = \vec{g}$ (34)

となる。つまり、物体に重力のみがはたらいているとき、どのような初速度で運動を始めても、物体の加速度は質量や速度によらず常に一定で、鉛直下向きに大きさ g であることがわかる。このことから、 \vec{g} を重力加速度という。重力加速度の水平成分は 0 であることから、水平方向の速さは一定で等速度運動をすることがわかる。

↑ 図 19 重力と重力加速度

実験 1 2 球の空中衝突

目的 球 A を球 B に向けて打ち出すのと同時に B を自由落下させたとき、2 つの球がどのような運動をするかを予想し、実験で確かめる。

準備 空中衝突実験器(筒に入った A を B に向かって打ち出すのと同時に、B が自由落下を始める装置で、このとき筒の先は B の位置に向けている。)

予想 A の速度を適当に仮定して、2 つの球の 0.05 s ごとの位置を予想し、グラフに記入する。A の初速度の大きさは一定のまま、向きを変えたときについても、同様に 0.05 s ごとの位置を予想する。

方法 ① 空中衝突実験器で、A を B に向けて打ち出すのと同時に、B を自由落下させる。このとき、2 つの球が空中でどのような運動をするかを観察する。

② A を打ち出す角度を変えて、同様に 2 球の運動を観察する。

考察 ① 実験結果は、初めの予想と一致したか。

② B から A を見ると、どのように見えるかを考えてみよう。

C 空気抵抗がはたらく落下運動

日常に見られる物体の運動は、ふつう空気の影響を受けている。図 20 のように鉄球と羽毛を落下させたとき、空気抵抗がはたらかない真空中では同じように落下するが、空気中で

は落下のしかたが異なる。これは、物体が落下するときを受ける空気の抵抗力の大きさが、物体の形や大きさによって異なるからである。

↑ 図 20 鉄球と羽毛の落下のストロボ写真

1 空気の抵抗力と終端速度

図 21 のように、質量 m の物体が初速度 0 で落下する場合を考えてみよう。

物体にはたらく空気の抵抗力は、空気に対する物体の運動の向きと逆向きにはたらく、その大きさは、空気に対する物体の速さ v [m/s] があまり大きくないときには v に比例することが知られている。つまり、比例定数を k (物体の形や大きさによって決まる) とすると、抵抗力は kv と表すことができる。

→ 図 21 空気抵抗がはたらく落下運動 (初速度 0 の場合)

図 21 (b) の運動方程式から、 $a = g - kv/m$ ($0 < a < g$) (35)

この式から、落下し始めてから v が小さいときには $a > 0$ であるので、物体の速さはしだいに大きくなることがわかる。また、 v が大きくなるにつれて、 a は 0 に近づいていくので、速さの増加の割合はしだいに小さくなっていくこともわかる。

空気の抵抗力と重力がつり合うと、物体は一定の速度で落下するようになる。この速度を **終端速度** terminal velocity という。終端速度の大きさを v_f [m/s] とすると、図 21 (c) の力のつり合いから、 $mg - kv_f = 0$ よって、 $v_f = mg/k$ (36)

この式より、同じ形で同じ大きさの物体で k が等しい場合、質量 m が大きい物体ほど終端速度が大きくなることがわかる。

空気抵抗がはたらく物体の運動の例として、雨滴の落下運動を考えてみよう → 図 22。もし、雨滴が 1000 m 上空から空気抵抗を受けずに自由落下すると考えて、地面に達する直前の速さを計算すると、140 m/s (≈ 500 km/h) にもなる。しかし、実際の雨滴は空気抵抗を受けながら落下するため、はるかに小さい終端速度で落下する。

↑ 図 22 雨滴の速度の変化の例 (雨滴の直径が 0.1 mm のとき)

問 8 質量 5.0×10^{-10} kg の雨滴が、0.28 m/s の一定の速度で落下している。雨滴にはたらく空気の抵抗力の大きさが速さ v に比例し、 kv (k は比例定数) で表されるものとして、雨滴が一定の速度で落下しているときの空気の抵抗力の大きさを求めよ。また、このことから k の値を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

第 2 節の振り返り

□投げ出した物体に重力だけがはたらくとき，軌道は放物線を描いて速度は刻々と変化する。この運動をどのように分解すれば，規則性を見出せるだろうか。

□Aを打ち出すと同時にBを自由落下させる実験1で,Aを打ち出す角度や速さを変えても，2球が必ず空中で衝突するのはなぜか説明してみよう。

章末問題

1 相対速度 (→p. 16 例題 1)

ある速度で池を進むボートがある。池に沿って東西方向の道路を東向きに 12.0 m/s で進む自動車 A から見ると、ボートは北向きに進むように見えた。また、池に沿って南北方向の道路を南向きに 3.0 m/s で進む自転車 B から見ると、ボートは北東の方向に進むように見えた。次の問いに答えよ。

- (1) A から見た結果より、ボートの速度の東西方向の成分の大きさを求めよ。
- (2) (1)と B から見た結果より、ボートの速度の南北方向の成分の大きさを求めよ。
- (3) このボートの速さを求めよ。また、速度の向きが東西方向となす角を θ とし、 $\tan \theta$ の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 90^\circ$ とする。

2 斜方投射 (→p. 24 例題 3)

右の図のように小球を放物運動させて、ちょうど最高点に達したときに、発射点から水平方向に距離 L だけ前方にある高さが H の台の上ののせたい。小球を打ち出す仰角 θ と初速度の大きさ v_0 をいくらにすればよいか、(1)~(5)にしたがって求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 小球が運動し始めてから最高点に達するまでの時間を v_0 , θ , g で表せ。
- (2) 最高点の高さが台の高さ H に等しいとすることにより、 H を v_0 , θ , g で表せ。
- (3) (1)で求めた時間で水平方向に距離 L だけ進むことから、 L を v_0 , θ , g で表せ。
- (4) (2)と(3)より、 $\tan \theta$ を H , L で表せ。
- (5) このような条件を満たす初速度の大きさ v_0 を、 H , L , g で表せ。

思考力を鍛える

1 水平投射と自由落下 (→p. 20~21)

水平面からの高さが H の点から、小球 A を速さ v_0 で水平に投げ出した。それと同時に、A から水平に距離 L だけ離れた高さ H の点から小球 B を自由落下させたところ、A と B は点 P で衝突した。重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。

- (1) 2 球が衝突するときの水平面からの高さ h を求めよ。
- (2) 2 球を空中で衝突させたい。そのために v_0 が満たす条件を求めよ。
- (3) B から見た A はどのような運動をしているか、説明せよ。