

アルファ 数学 I

第2章 「2次関数」

第2節 2次関数の最大・最小

2 最大・最小の応用

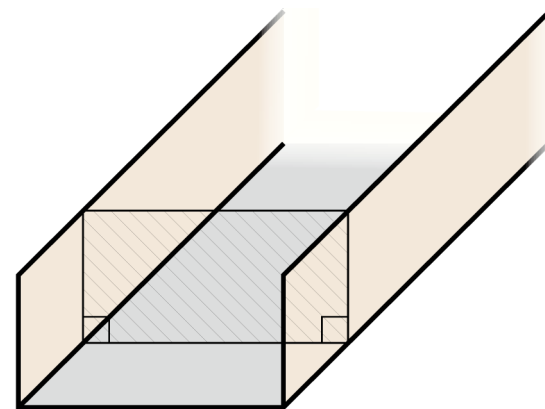
2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.71)

応用例題

8

幅が 20 cm の銅板がある。これを右の図のように両端から同じ長さだけ 90° に折り曲げて水を流す溝を作る。断面の面積を最大にするには、両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。また、そのときの断面の面積を求めよ。



着想

両端から折り曲げる長さを x cm として、断面の面積を x で表す。

このとき、 x のとり得る範囲についても考える。

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.71)

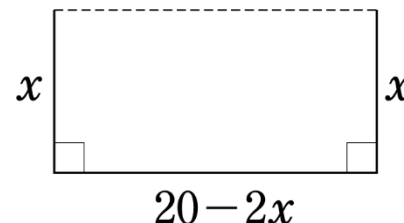
応用例題

8

幅が 20 cm の銅板がある。これを右の図のように両端から同じ長さだけ 90° に折り曲げて水を流す溝を作る。断面の面積を最大にするには、両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。また、そのときの断面の面積を求めよ。

解

銅板の両端から折り曲げる長さを x cm とすると、溝の底の幅は $(20 - 2x)$ cm となる。



$x > 0$, $20 - 2x > 0$ より, $0 < x < 10$

切り口の面積を y cm² とすると,

$$\begin{aligned} y &= x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x \\ &= -2(x^2 - 10x) \\ &= -2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.71)

応用例題

8

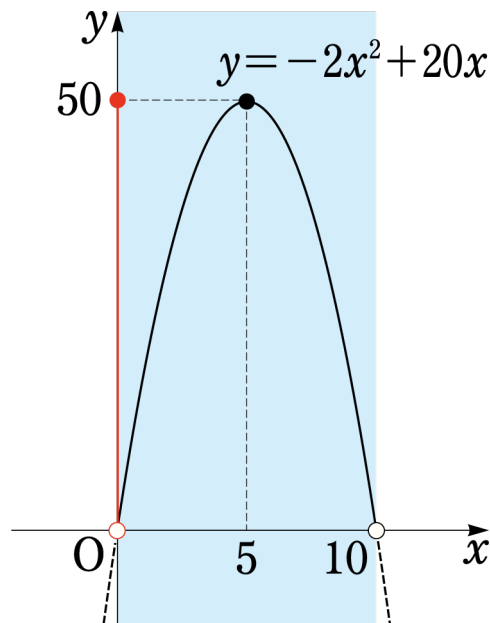
解

幅が 20 cm の銅板がある。これを右の図のように両端から同じ長さだけ 90° に折り曲げて水を流す溝を作る。断面の面積を最大にするには、両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。また、そのときの断面の面積を求めよ。

この関数のグラフは、右の図の実線部分となるから、

$x = 5$ のとき最大値 50 をとる。

よって、両端から 5 cm だけ折り曲げればよく、そのときの切り口の面積は 50 cm^2 である。

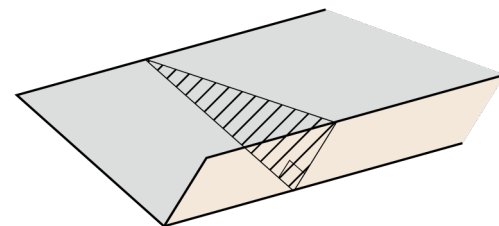


2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.71)

問 21

幅が 12 cm の銅板がある。これを右の図のように 90° に 1 回だけ折り曲げて水を流す溝を作る。断面の面積を最大にするには、どのように折り曲げればよいか。
また、そのときの断面の面積を求めよ。



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.71)

問 21

幅が 12 cm の銅板がある。これを右の図のように 90° に 1 回だけ折り曲げて水を流す溝を作る。切り口の面積を最大にするには、どのように折り曲げればよいか。また、そのときの切り口の面積を求めよ。

解

一方の長さを x とすると、 $0 < x < 12$ で、他の 1 辺の長さは $12 - x$ となる。

三角形の面積を $y \text{ cm}^2$ とすると、

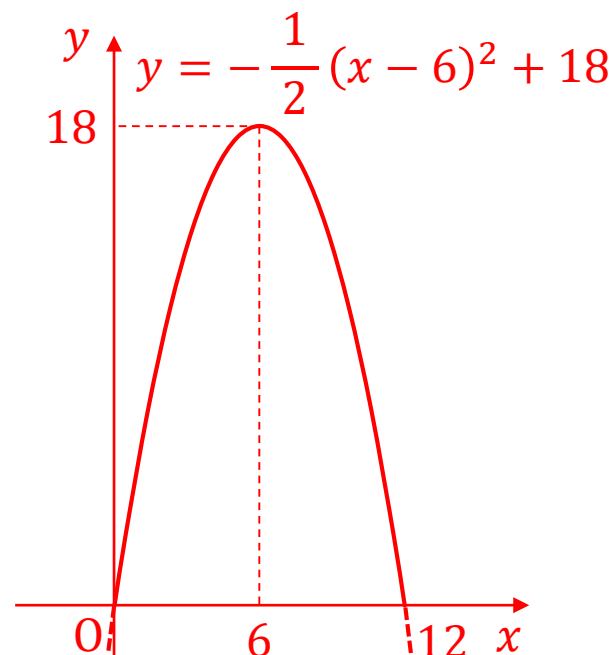
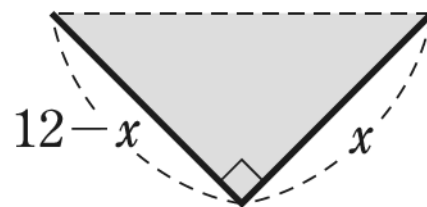
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} x(12 - x) \\ &= -\frac{1}{2} (x - 6)^2 + 18 \end{aligned}$$

$0 < x < 12$ より、 $x = 6$ のとき

y は最大値 18 をとる。

よって、直角二等辺三角形のときで、

そのときの断面の面積は 18 cm^2 である。



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

応用例題 9

定義域が変化するときの最大・最小

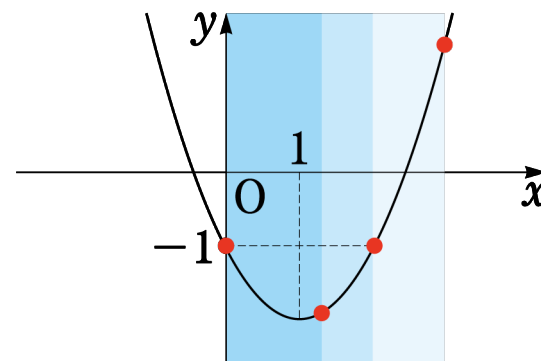
a を正の定数とするとき、関数 $y = x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

応用例題9の
グラフの変化



着想

下に凸の放物線であるから、軸から離れるほど y の値は大きくなる。
よって、定義域の両端 $x = 0$, a のときの y の値の大小を比較する。



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

応用例題

9

a を正の定数とすると、関数 $y = x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

応用例題9の
グラフの変化



解

$$y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$$

この関数のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = 1$ である。

$x = 0$ と $x = a$ のときの y の値が等しくなる a の値を求めると、

$$-1 = a^2 - 2a - 1, \quad a(a - 2) = 0$$

$$a > 0 \text{ より, } a = 2$$

よって、 a の値と 2 の大小関係より、次の 3 通りが考えられる。

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

応用例題

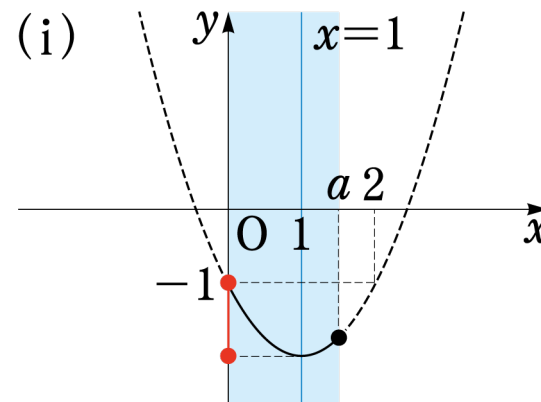
9

a を正の定数とすると、関数 $y = x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

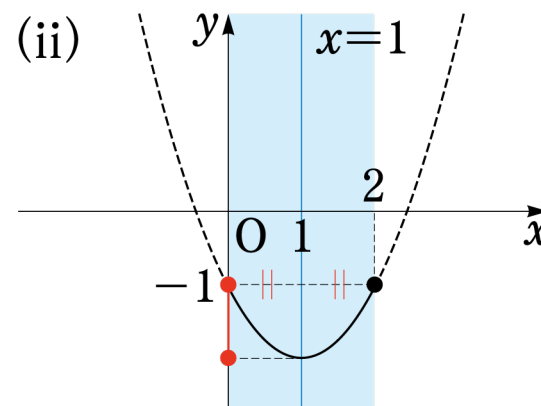
(i) $0 < a < 2$ のとき

$x = 0$ で最大値 -1 をとる。



(ii) $a = 2$ のとき

$x = 0, 2$ で最大値 -1 をとる。



応用例題9の
グラフの変化



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

応用例題

9

a を正の定数とすると、関数 $y = x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

(iii) $a > 2$ のとき

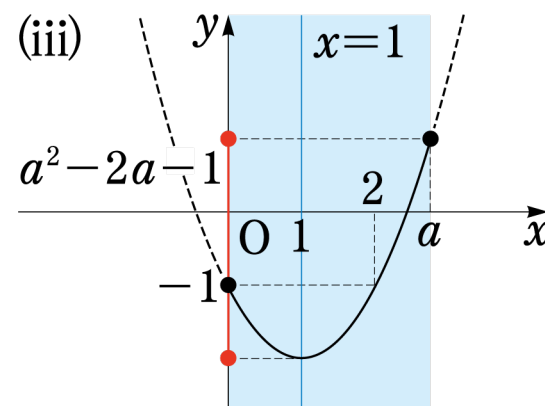
$x = a$ で最大値 $a^2 - 2a - 1$ をとる。

よって、次のようになる。

$0 < a < 2$ のとき, $x = 0$ で最大値 -1

$a = 2$ のとき, $x = 0, 2$ で最大値 -1

$a > 2$ のとき, $x = a$ で最大値 $a^2 - 2a - 1$



応用例題9の
グラフの変化



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 22

a を正の定数とするととき, 関数 $y = 2x^2 - 2x$
($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。また, そのときの x
の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 2x \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 22

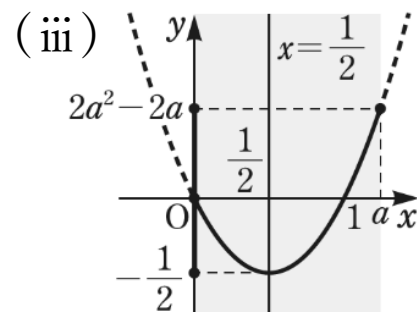
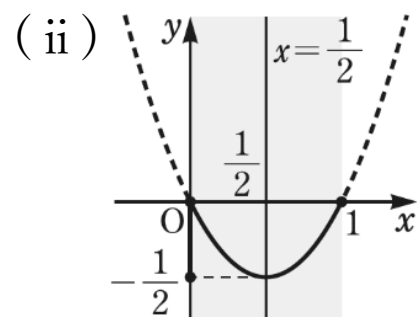
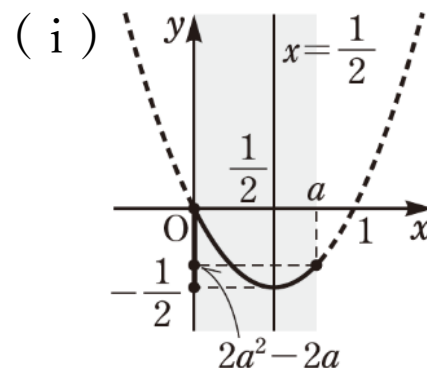
a を正の定数とすると、関数 $y = 2x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

解

(i) $0 < a < 1$ のとき,
 $x = 0$ で最大値 0

(ii) $a = 1$ のとき,
 $x = 0, 1$ で最大値 0

(iii) $a > 1$ のとき,
 $x = a$ で最大値 $2a^2 - 2a$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 22

a を正の定数とすると、関数 $y = 2x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

解

よって、次のようになる。

$0 < a < 1$ のとき、

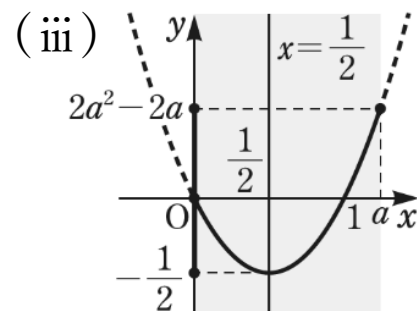
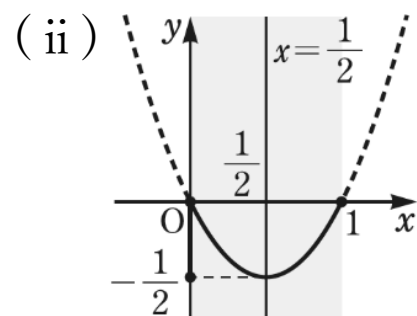
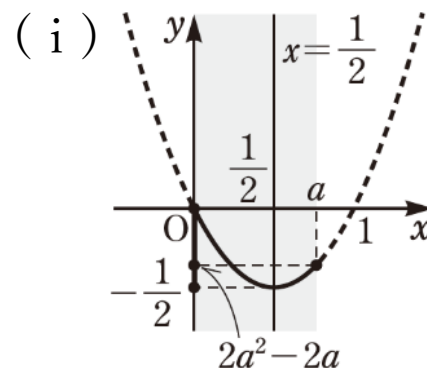
$x = 0$ で最大値 0

$a = 1$ のとき、

$x = 0, 1$ で最大値 0

$a > 1$ のとき、

$x = a$ で最大値 $2a^2 - 2a$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 23

問22 の関数 (a を正の定数とするととき, 関数 $y = 2x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq a$)) の最小値を求めよ。
また, そのときの x の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 2x \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 23

問22 の関数(a を正の定数とすると、関数 $y = 2x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq a$))の最小値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

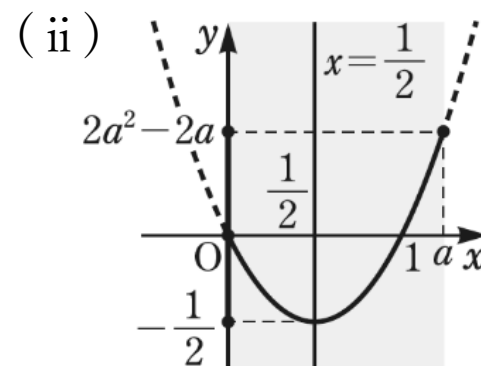
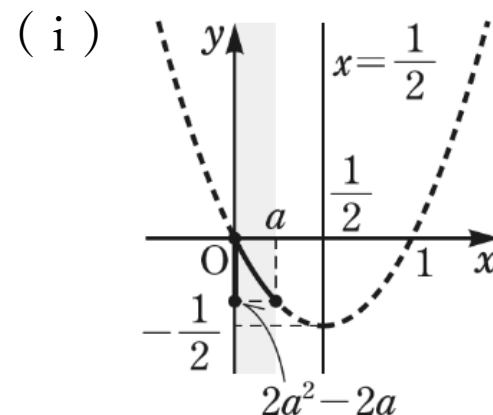
解

(i) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき,

$x = a$ で最小値 $2a^2 - 2a$

(ii) $a \geq \frac{1}{2}$ のとき,

$x = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{2}$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.72)

問 23

問22 の関数(a を正の定数とすると、関数 $y = 2x^2 - 2x$ ($0 \leq x \leq a$))の最小値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

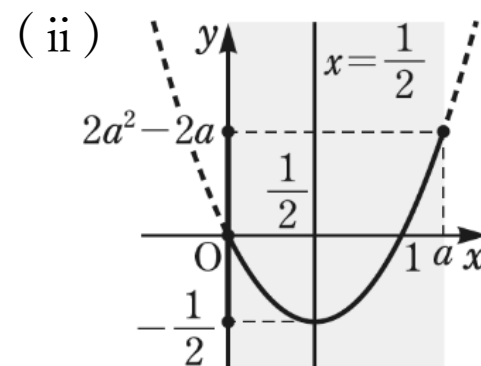
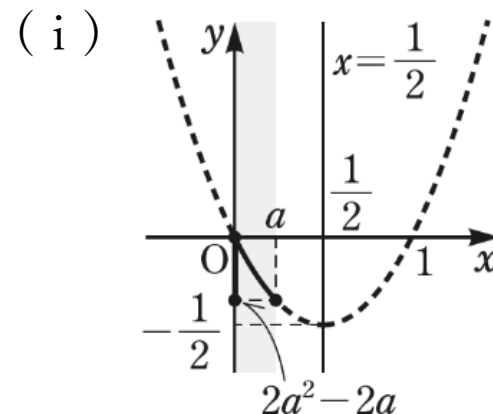
よって、次のようになる。

$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき、

$x = a$ で最小値 $2a^2 - 2a$

$a \geq \frac{1}{2}$ のとき、

$x = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{2}$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

応用例題
10

係数が変化するときの最大・最小

a を定数とするとき、
関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の
最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。



着想

a の値が変化すると、関数のグラフの何が変化し、それ
にともなって最小値をとる x の値がどのように変わって
いくかを考える。

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

応用例題 10

a を定数とするとき、関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 = (x - a)^2 + 1$$

この関数のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線
 $x = a$ である。

定義域と軸の位置関係から、次の 3 通りが考えられる。

応用例題10の
グラフの変化



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

応用例題

10

a を定数とするととき、関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

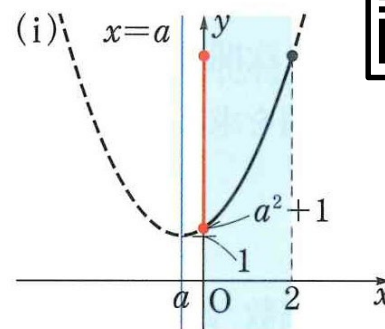
応用例題10の
グラフの変化



解

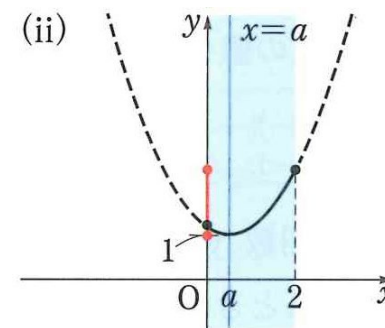
(i) $a < 0$ のとき

$x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$ をとる。



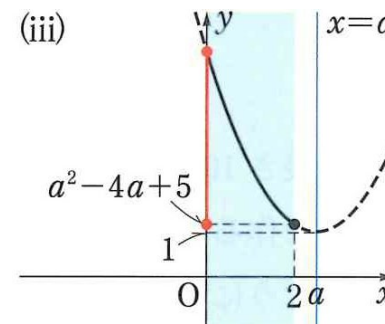
(ii) $0 \leq a \leq 2$ のとき

$x = a$ で最小値 1 をとる。



(iii) $a > 2$ のとき

$x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$ をとる。



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

応用例題

10

a を定数とするとき、関数 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

応用例題10の
グラフの変化



解

よって、次のようになる。

$a < 0$ のとき、

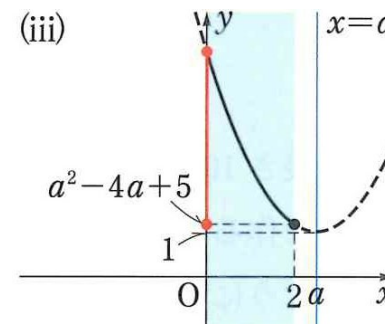
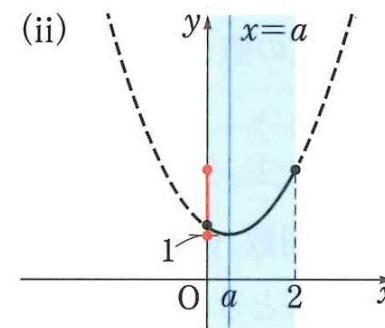
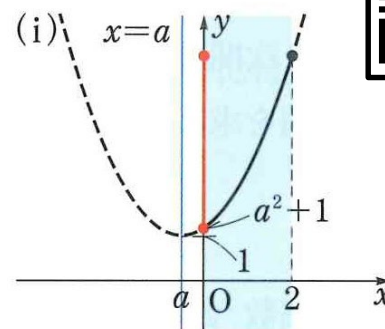
$x = 0$ で最小値 $a^2 + 1$

$0 \leq a \leq 2$ のとき、

$x = a$ で最小値 1

$a > 2$ のとき、

$x = 2$ で最小値 $a^2 - 4a + 5$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 24

a を定数とするとき、関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$) の最小値を求めよ。

また、そのときの x の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax \\ &= (x - a)^2 - a^2 \quad (0 \leq x \leq 3) \end{aligned}$$

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 24

a を定数とするとき、関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$) の最小値を求めよ。

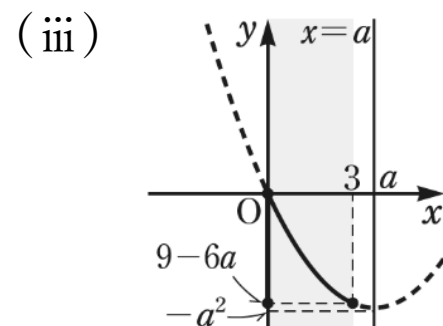
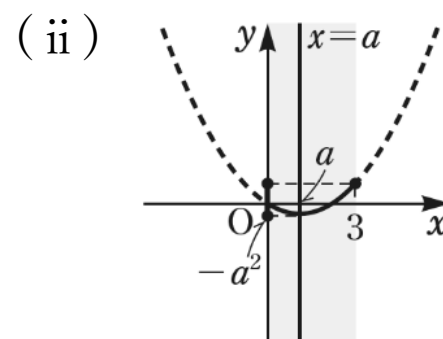
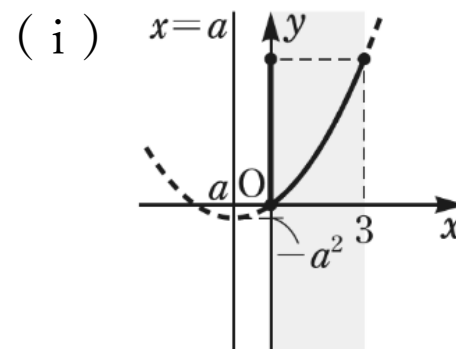
また、そのときの x の値を求めよ。

解

(i) $a < 0$ のとき,
 $x = 0$ で最小値 0

(ii) $0 \leq a \leq 3$ のとき,
 $x = a$ で最小値 $-a^2$

(iii) $a > 3$ のとき,
 $x = 3$ で最小値 $9 - 6a$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 24

a を定数とすると、関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$) の最小値を求めよ。

また、そのときの x の値を求めよ。

解

よって、次のようになる。

$a < 0$ のとき、

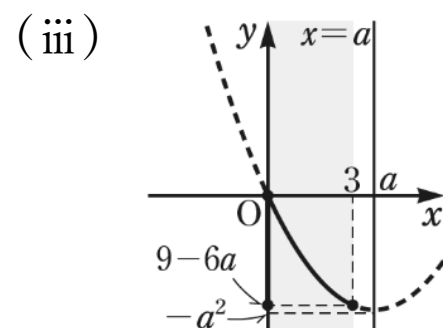
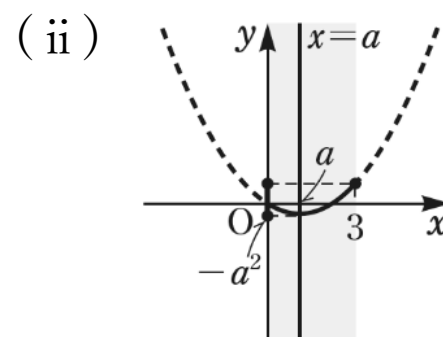
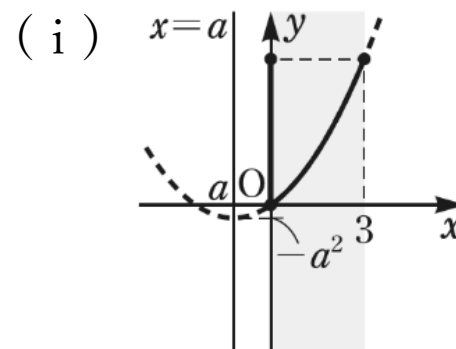
$x = 0$ で最小値 0

$0 \leq a \leq 3$ のとき、

$x = a$ で最小値 $-a^2$

$a > 3$ のとき、

$x = 3$ で最小値 $9 - 6a$



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 25

問24 の関数(a を定数とするとき, 関数
 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$))の最大値を求めよ。
また, そのときの x の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax \\ &= (x - a)^2 - a^2 \quad (0 \leq x \leq 3) \end{aligned}$$

2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 25

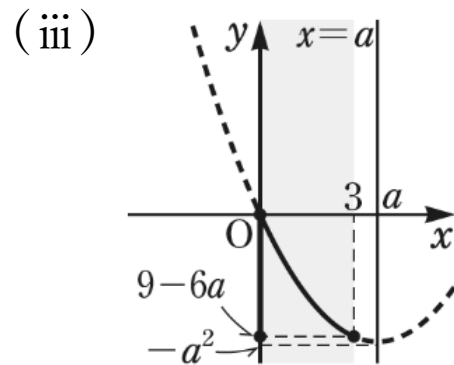
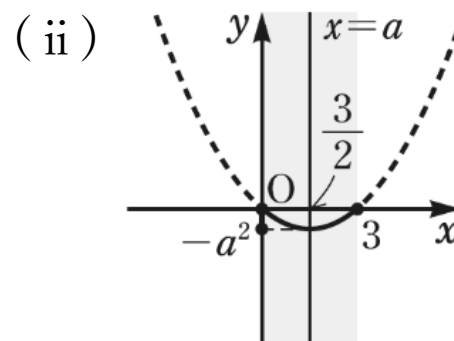
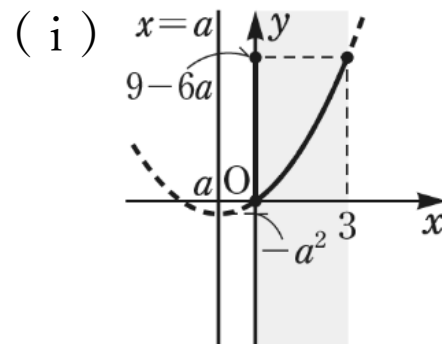
問24 の関数(a を定数とすると、関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$))の最大値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

(i) $a < \frac{3}{2}$ のとき,
 $x = 3$ で最大値 $9 - 6a$

(ii) $a = \frac{3}{2}$ のとき,
 $x = 0, 3$ で最大値 0

(iii) $a > \frac{3}{2}$ のとき,
 $x = 0$ で最大値 0



2 最大・最小の応用

内容解説資料
(教科書 p.73)

問 25

問24 の関数(a を定数とすると、関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 3$))の最大値を求めよ。
また、そのときの x の値を求めよ。

解

よって、次のようになる。

$a < \frac{3}{2}$ のとき、

$x = 3$ で最大値 $9 - 6a$

$a = \frac{3}{2}$ のとき、

$x = 0, 3$ で最大値 0

$a > \frac{3}{2}$ のとき、

$x = 0$ で最大値 0

